Krzysztof Łapsa

Badanie momentu bezwładności

Cele ćwiczenia

- Wyznaczenie momentu bezwładności wybranych brył
- Doświadczalne potwierdzenie twierdzenia Steinera

Wprowadzenie

W opisie dynamiki ruchu postępowego pojawia się pojęcie bezwładności związane z masą m poruszającego się ciała. W przypadku ruchu obrotowego znajomość masy ciała jest niewystarczająca, istotny jest również jej przestrzenny rozkład względem osi obrotu. Wielkością fizyczną zawierającą informacje o masie ciała i jej przestrzennym rozkładzie względem osi obrotu jest *moment bezwładności I*. Wielkość ta pojawia się w zasadach dynamiki ruchu obrotowego, w zasadzie zachowania momentu pędu itd.

Dla pojedynczego punktu materialnego o masie m wirującego wokół osi oddalonej od niego o odległość r (rys.1a) możemy zapisać następującą zależność na moment bezwładności:

$$I = mr^2. \qquad (1)$$

W przypadku układu N punktów materialnych sztywno połączonych ze sobą względem osi obrotu, zwanej osią bezwładności (rys. 1b), moment bezwładności układu jest równy sumie momentów bezwładności poszczególnych punktów materialnych:

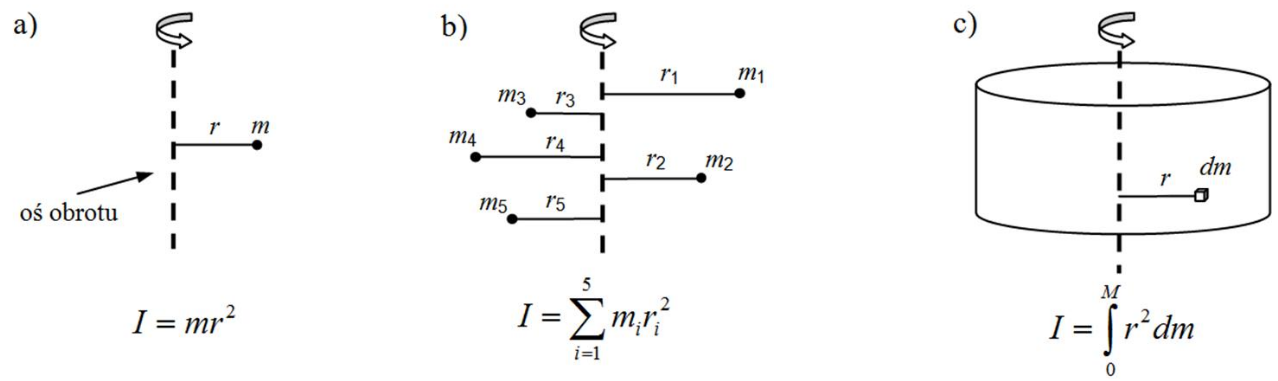
$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_N r_N^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \,, \qquad (2)$$

gdzie m_i jest masą i-tego punktu materialnego, a r_i jego odległością od osi bezwładności.

Jeżeli mamy do czynienia z bryłą sztywną o masie M, hipotetycznie dzielimy ją na zbiór nieskończenie małych elementów (wycinków) o masach dm. Moment bezwładności bryły jest równy sumie momentów bezwładności poszczególnych elementów. Zakładając, że masa dm elementu bryły dąży do zera, sumę można zapisać w postaci całkowej:

$$I = \int_0^M r^2 dm \,, \qquad (3)$$

gdzie r jest odległością elementu o masie dm od osi obrotu (rys. 1c).



Rys.1 Wizualizacja wyznaczania momentu bezwładności dla a) punktu materialnego, b) zbioru punktów materialnych sztywno połączonych ze sobą, c) bryły sztywnej.

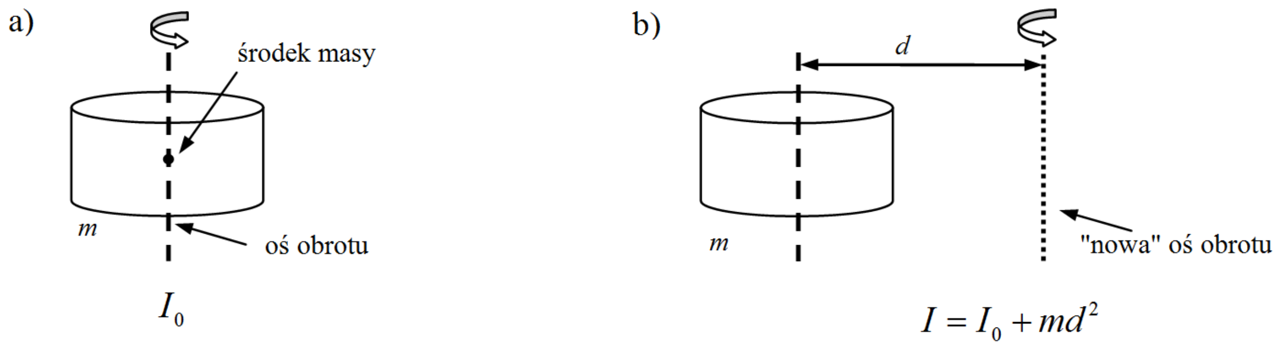
Obliczenia momentu bezwładności na podstawie wzoru (3) są stosunkowo proste jedynie dla brył posiadających oś symetrii równoległą względem osi bezwładności (pręt, walec, kula itp.). W przypadku brył o złożonym lub nieregularnym kształcie metody analityczne są bardzo skomplikowane. W praktyce moment bezwładności takich brył można wyznaczyć korzystając z metod doświadczalnych lub analizy numerycznej.

Twierdzenie Steinera

Jeżeli chcemy obliczyć moment bezwładności względem dowolnej osi nieprzechodzącej przez środek masy bryły, przydatne staje się twierdzenie Steinera. Mówi ono, że jeżeli moment bezwładności bryły sztywnej względem osi przechodzącej przez jej środek masy równa się I_0, to moment bezwładności tej bryły obracającej się względem innej osi równoległej do osi przechodzącej przez jej środek masy wynosi:

$$I = I_0 + md^2, \qquad (4)$$

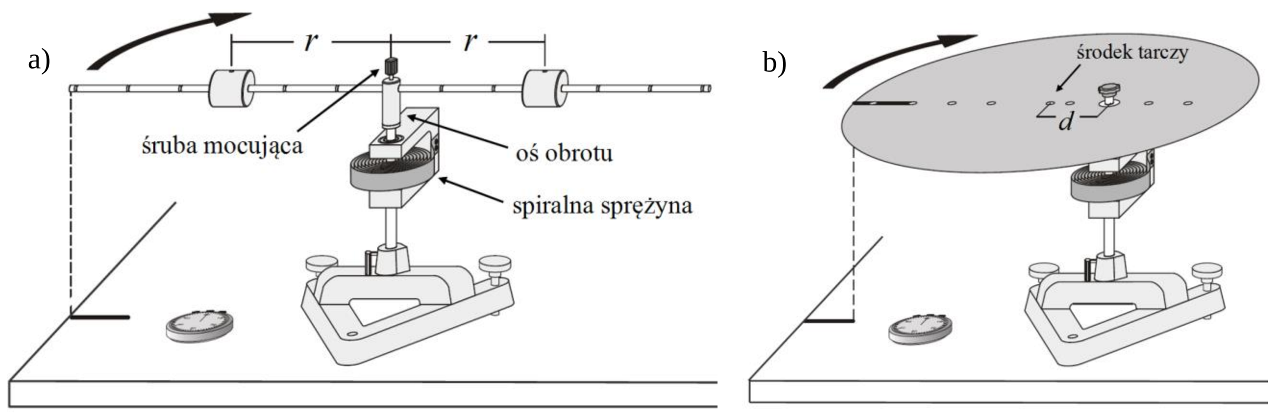
gdzie m jest masą bryły, a d jest odległością między osiami. Powyższe twierdzenie zostało zobrazowane na rys. 2.



Rys.2 Ilustracja twierdzenia Steinera: a) I_0 - moment bezwładności bryły względem osi przechodzącej przez jej środek masy, b) I - moment bezwładności bryły względem "nowej" osi obrotu.

Układ pomiarowy

W ćwiczeniu zostaną wyznaczone momenty bezwładności stalowego pręta oraz dysku. Dodatkowym zadaniem będzie eksperymentalne potwierdzenie twierdzenia Steinera. Do badań posłuży wahadło skrętne złożone ze stabilnej podstawy oraz pionowej osi osadzonej na łożyskach o bardzo małym tarciu. Oś oraz podstawa połączone są przy pomocy spiralnej sprężyny, która umożliwia wahania skrętne. Na końcu osi znajduje się śruba umożliwiająca mocowanie na niej brył (rys. 3a).



Rys. 3 Wahadło skrętne: a) zestaw do wyznaczenia momentu kierującego, b) zestaw do badania twierdzenia Steinera

W trakcie ćwiczenia na osi wahadła będą mocowane: pręt, pręt z dwoma ciężarkami lub dysk (rys. 3). Na pręcie znajdują się nacięcia, a w ciężarki wkręcone są specjalne sprężynujące śruby, co umożliwia precyzyjne umieszczenie ciężarków na pręcie (przesuwając ciężarek wzdłuż pręta, czujemy wyraźne wskoczenie śruby do nacięcia). W metalowej tarczy służącej do badania twierdzenia Steinera nawiercono szereg otworów, poprzez które można mocować tarczę na osi wahadła.

Wahadło skrętne jest szczególnym przypadkiem wahadła fizycznego. Jeżeli założymy, że wychylenia wahadła są niewielkie (do około 180°) oraz zaniedbamy siły oporu, jego ruch można opisać jako *ruch harmoniczny prosty*. W takim przypadku okres T drgań wahadła można zapisać następująco:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}, \qquad (5)$$

gdzie I jest momentem bezwładności bryły zamocowanej na osi wahadła, a D jest *momentem kierującym* sprężyny wahadła. Moment kierujący D jest parametrem charakterystycznym dla danej sprężyny, zależnym od jej budowy, rodzaju materiału, sposobu hartowania itd.

Pomiary i obliczenia

Dysponując wahadłem skrętnym, możemy wyliczyć moment bezwładności zamocowanej na nim bryły. Zastosujemy w tym celu przekształcone równanie (5), wynik pomiaru okresu drgań T oraz wyznaczony moment kierujący D:

$$I = D\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 . \tag{6}$$

Wyznaczenie momentu kierującego

W omawianym ćwiczeniu moment kierujący sprężyny wyznaczymy mierząc okresy wahań pręta obciążonego dwoma ciężarkami (rys. 3a). Moment bezwładności układu złożonego z pręta z dwoma ciężarkami, umieszczonymi symetrycznie w odległości r od osi obrotu, można zapisać następującym wzorem:

$$I = I_P + 2m_C r^2 , \tag{7}$$

gdzie I_P jest momentem bezwładności pręta, a m_C jest masą każdego ciężarka.
Na podstawie wzoru (6) moment bezwładności pręta zamocowanego na osi możemy zapisać równaniem:

$$I_P = D\left(\frac{T_P}{2\pi}\right)^2 , \tag{8}$$

gdzie T_P jest okresem drgań wahadła obciążonego prętem (bez ciężarków).
Podstawiając do równania (6) wzory (7) i (8), otrzymujemy następującą zależność:

$$D\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 2m_C r^2 + D\left(\frac{T_P}{2\pi}\right)^2 , \tag{9}$$

która po przekształceniu przybiera postać:

$$T^2 = \frac{8\pi^2 m_C}{D} r^2 + T_P^2 . \tag{10}$$

Dokonując w powyższym równaniu następujących podstawień, $y = T^2$, $x = r^2$, $a = 8\pi^2 m_C/D$ oraz $b = T_P^2$, uzyskuje się zależność typu $y = ax+b$. Jest to funkcja liniowa, gdzie wartość a jest współczynnikiem kierunkowym prostej a b punktem przecięcia z osią y. Stosując metodę regresji liniowej do zależności kwadratu okresu drgań od kwadratu odległości ciężarków od osi: $T^2 = f(r^2)$, można wyznaczyć współczynnik nachylenia prostej a, a następnie moment kierujący:

$$D = \frac{8\pi^2 m_C}{a} . \tag{11}$$

Wyznaczenie momentów bezwładności pręta i dysku względem ich osi symetrii

W celu wyznaczenia momentu bezwładności pręta można skorzystać z wcześniejszego pomiaru okresu dla nieobciążonego pręta oraz z równania (8). Chcąc wyznaczyć moment bezwładności dysku należy zamocować jego środek na osi, a następnie zmierzyć okres drgań wahadła. Korzystając z równania (6) wyznaczymy doświadczalną wartość momentu bezwładności dysku. Chcąc porównać uzyskane wartości doświadczalne z wartościami teoretycznymi, należy zważyć obydwie bryły, zmierzyć długość pręta oraz średnicę dysku. Wartości teoretyczne momentów bezwładności obliczymy z następujących równań:

$$I = \frac{1}{12} m l^2 , \tag{12}$$

$$I = \frac{1}{2} M R^2 , \tag{13}$$

gdzie m jest masą pręta, l - długością pręta, M - masą dysku, R - promieniem dysku.

Doświadczalne potwierdzenie twierdzenia Steinera

Do badań wykorzystamy wahadło z zamocowanym dyskiem w konfiguracji przedstawionej na rys. 3b. Dysk kolejno przykręcamy na osi dla różnych odległości d od środka tarczy (0, 2, 4, ..., 14 cm). Dla każdego położenia wyznaczamy okres drgań wahadła, a następnie, korzystając z równania (6), moment bezwładności dysku. W celu potwierdzenia twierdzenia Steinera obliczamy teoretyczny moment bezwładności dysku na podstawie równania (4), które w powyższym przypadku przybierze następującą postać:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 + Md^2 . \tag{14}$$

Przebieg ćwiczenia

A. *Wyznaczenie momentu kierującego sprężyny*

1. Wyznacz: masę ciężarków, masę i długość pręta oraz odległości między nacięciami na pręcie. Zapisz dokładności pomiarowe.
2. Umocuj środek pręta na osi wahadła, a następnie wychyl go o kąt około 90° i puść. Za pomocą stopera zmierz czas pięciu okresów wychyleń ($t = 5T$). Czynność tę powtórz jeszcze dwukrotnie.
3. Wsuń ciężarki na pręt i ustaw je symetrycznie tak, aby ich środki pokrywały się z nacięciami na pręcie znajdującymi się najbliżej jego środka (przy precyzyjnym ustawieniu czuje się wskoczenie śruby ciężarka do nacięcia). Wykonaj pomiary okresu analogicznie do pkt. 2.
4. Pomiary z pkt. 3 kontynuuj dla kolejnych odległości r ciężarków od osi obrotu .
5. Dla każdego położenia ciężarków wylicz średni czas pięciu okresów wychyleń, a następnie okres drgań T.
6. Wykreśl zależność kwadratu okresu od kwadratu odległości ciężarków $T^2 = f(r^2)$.
7. Posługując się metodą regresji liniowej wyznacz współczynnik nachylenia prostej a oraz jego niepewność pomiarową. Następnie, korzystając z równania (11), wylicz moment kierujący D oraz jego niepewność pomiarową. Wykonaj rachunek jednostek.

B. *Wyznaczenie momentów bezwładności pręta i dysku względem ich osi symetrii*

1. Korzystając z wyników uzyskanych w punktach A.1 i A.2 oraz równania (8), wylicz moment bezwładności pręta.
2. Wyznacz masę dysku oraz jego średnicę. Zamocuj dysk tak, aby jego środek pokrywał się z osią obrotu. Wykonaj pomiary analogicznie do punktu A2.
3. Oblicz średni okres wahań dysku oraz jego moment bezwładności (skorzystaj z równania (6)).
4. Korzystając z wyników pomiaru mas brył, długości pręta oraz średnicy dysku, oblicz teoretyczne wartości momentów bezwładności na podstawie wzorów (12) i (13). Porównaj wyniki doświadczalne z teoretycznymi.

C. *Doświadczalne potwierdzenie twierdzenia Steinera*

1. Kontynuuj pomiary okresu drgań dysku analogicznie do poprzednich, zmieniając odległość osi od środka tarczy d co 2 cm (0, 2, 4, ..., 14 cm).
2. Wylicz średnie wartości okresów wahań oraz momenty bezwładności dysku korzystając z równania (6).
3. Wylicz z równania (14) teoretyczne wartości momentu bezwładności dysku względem kolejnych osi obrotu.
4. Porównaj w tabeli uzyskane doświadczalnie i teoretycznie momenty bezwładności dysku celem potwierdzenia twierdzenia Steinera.
5. Na wspólnym układzie współrzędnych wykreśl doświadczalne i teoretyczne momenty bezwładności dysku w funkcji kwadratu odległości osi od środka dysku: $I = f(d^2)$.

Zapisz wnioski.