20. Badanie rezonansu mechanicznego

Wprowadzenie

Rodzaj ruchu, jaki wykonuje ciało, zależy od właściwości siły na nie działającej. Ruch nazywamy *harmonicznym*, jeżeli siła działająca na ciało jest skierowana do jednego punktu, będącego położeniem równowagi, a jej wartość jest proporcjonalna do wychylenia ciała z położenia równowagi. Wyraża to równanie:

$$F = -k(x - x_0), \tag{20.1}$$

gdzie: x – aktualne położenie, x_0 – położenie równowagi, k – stała sprężystości.

Układ fizyczny charakteryzujący się powyższymi właściwościami nazywamy *oscylatorem harmonicznym*.

Przykładami oscylatorów harmonicznych są:

- sprężyna z zamocowaną na końcu masą,
- wahadło matematyczne i fizyczne (w zakresie małych wychyleń),
- elektrony wykonujące ruch drgający w antenie, a także w obwodzie LC,
- atomy i jony drgające wokół położeń równowagi w węzłach sieci krystalicznej.

Jeżeli w równaniu (20.1) przyjmiemy $x_0 = 0$ oraz wyrazimy siłę przez masę i przyspieszenie, otrzymamy równanie:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{20.2}$$

Po podzieleniu przez masę i wprowadzeniu oznaczenia $k/m = \omega_0^2$ otrzymujemy postać:

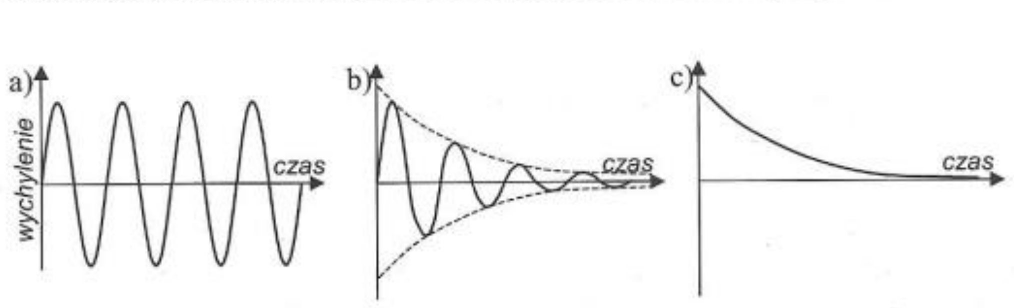
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \tag{20.3}$$

która jest najczęściej spotykaną formą *równania różniczkowego ruchu harmonicznego*. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{20.4}$$

gdzie A jest amplitudą, a $\omega_0 = 2\pi/T$ – częstotliwością kołową. Wykresem funkcji jest sinusoida o stałej amplitudzie, co przedstawia rys. 20.1a

Wyrażenie $(\omega_0 t + \varphi)$ jest fazą ruchu, a φ – fazą początkową zależną od stanu ruchu w chwili $t = 0$. Jeżeli w chwili początkowej ciało jest maksymalnie wychylone, to $\varphi = 0$; jeżeli $t = 0$ i $x = 0$, to $\varphi = \pi/2$; jeżeli $t = 0$ i $x = A/2$, to $\varphi = \pi/3$. Intuicyjnie, faza w dowolnym stanie ruchu jest kątem na wykresie „wzorcowej" (nieprzesuniętej) kosinusoidy, któremu odpowiada taki sam stan wychylenia.



Rys. 20.1. Wykres ruchu harmonicznego: a) prostego b), słabo tłumionego, c) silnie tłumionego

Wielkość x występująca w równaniach (20.3) i (20.4) jest wychyleniem w znaczeniu ogólnym – może to być odległość liniowa od położenia równowagi, może to być kąt wychylenia, a także może to być wielkość niemechaniczna, np. natężenie prądu lub ładunek elektryczny na okładce kondensatora w obwodzie LC.

Opisany wyżej ruch harmoniczny nosi nazwę ruchu *harmonicznego prostego* dla odróżnienia od innych przypadków, kiedy oprócz siły typu $-kx$ działają jeszcze inne siły.

Równanie *ruchu harmonicznego tłumionego* ma postać:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}. \tag{20.5}$$

Wyraz $-bdx/dt$ jest siłą tłumiącą, której wartość jest proporcjonalna do prędkości. Wykonując proste przeniesienia i dzielenia, doprowadzimy ostatnie równanie do postaci:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \tag{20.6}$$

gdzie podstawiono $2\beta = b/m$ oraz $\omega_0^2 = k/m$. Wielkość β nazywa się *współczynnikiem tłumienia.*

W celu znalezienia rozwiązania równania (20.6) wykonujemy podstawienie:

$$x = ze^{-\beta t}, \tag{20.7}$$

w wyniku czego równanie to przyjmie postać:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2)z = 0, \tag{20.8}$$

która jest całkowicie równoważna pod względem formalnym równaniu (20.3), jeśli $\omega_0^2 - \beta^2$ jest dodatnie. Rozwiązaniem równania różniczkowego (20.8) jest funkcja typu (20.4)

$$z = A\cos(\omega' t + \delta), \tag{20.9}$$

w której częstotliwość kołowa jest wyrażona wzorem:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{20.10}$$

Wracamy ponownie do zmiennej x i otrzymujemy wyraźną postać zależności czasowej wychylenia w ruchu harmonicznym tłumionym:

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi). \tag{20.11}$$

Jak widać z powyższego równania, amplituda w ruchu tłumionym wynosi $A\exp(-\beta t)$ i nie jest stała, lecz zmniejsza się wykładniczo z czasem, dążąc do zera.

Ponadto częstość drgań ω' jest mniejsza niż w ruchu swobodnym. Współczynnik tłumienia określamy jako logarytm stosunku amplitud dwóch kolejnych drgań. Na podstawie równania (20.11) amplitudy drgań oznaczonych przykładowo indeksami n i $n+1$ wynoszą odpowiednio

$$A_n = A\mathrm{e}^{-\beta t} \text{ oraz } A_{n+1} = A\mathrm{e}^{-\beta(t+T)}.$$

Po wzięciu powyższego pod uwagę i dokonaniu elementarnych przekształceń otrzymujemy wyrażenie na współczynnik tłumienia:

$$\beta = \frac{1}{T}\ln\frac{A_n}{A_{n+1}}. \tag{20.12}$$

Wprowadzimy pojęcie *czasu relaksacji*

$$\tau = \frac{1}{2\beta}, \tag{20.13}$$

za pomocą którego możemy następująco wyrazić amplitudę:

$$A\mathrm{e}^{(-\beta t)} = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{2\tau}}. \tag{20.14}$$

Widzimy, że w ciągu czasu $t = 2\tau$ amplituda zmniejsza się e-krotnie. Ponieważ energia ruchu drgającego jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy, więc energia zmniejsza się e-krotnie w ciągu czasu $t = \tau$.

Ważnym parametrem charakteryzującym układ drgający jest *współczynnik dobroci* Q zdefiniowany poniżej.

$$Q = 2\pi\frac{\text{energia ruchu}}{\text{średnia energia tracona w jednym okresie}}. \tag{20.15}$$

Można wykazać, że współczynnik dobroci zależy od czasu relaksacji (lub współczynnika tłumienia) oraz od częstotliwości drgań swobodnych układu w następujący sposób:

$$Q = \omega_0\tau = \frac{\omega_0}{2\beta}. \tag{20.16}$$

Należy pamiętać, że funkcja opisana równaniem (20.11) jest rozwiązaniem równania (20.8) tylko dla przypadku, gdy $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$, któremu odpowiada słabe tłumienie. Gdy tłumienie jest silne, czyli dla $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$, rozwiązaniem równania (20.8) jest funkcja nieokresowa, opisująca powolny nieoscylacyjny powrót do położenia równowagi. Zależność czasową wychylenia w ruchu nietłumionym oraz słabo i silnie tłumionym przedstawiono na rys. 20.1. Szczegółowy opis ruchu harmonicznego znajduje się w podręcznikach fizyki ogólnej*

* Patrz np.: Ch. Kittel i in., Mechanika, wyd 3, Warszawa, PWN 1975

Drgania wymuszone

Oprócz omówionej siły tłumiącej na oscylator może działać okresowa siła zewnętrzna o dowolnej częstotliwości. Równanie ruchu ma wówczas postać:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin \omega'' t\,, \tag{20.17}$$

a jego rozwiązaniem jest funkcja

$$x = A\sin(\omega'' t + \varphi)\,. \tag{20.18}$$

Jak widać, w tej sytuacji oscylator wykonuje ruch harmoniczny z częstotliwością siły wymuszającej ω'', a nie z częstotliwością własną ω_0.

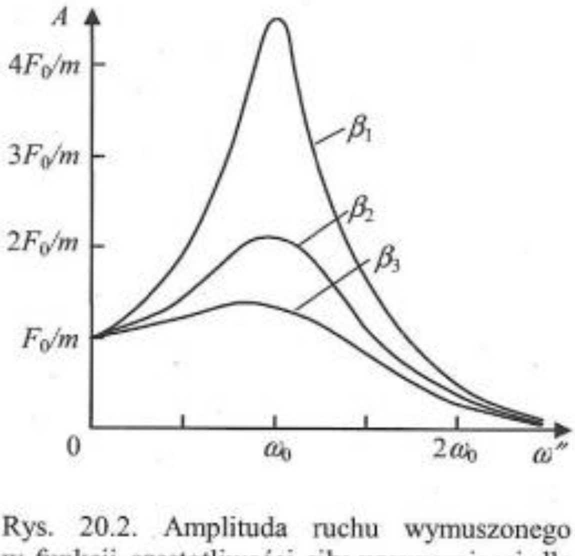
Amplituda ruchu wymuszonego jest proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej F_0, a także zależy bardzo mocno od różnicy między częstotliwością siły wymuszającej a częstotliwością własną oscylatora:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega''^2)^2 + (2\beta\omega'')^2}}\,. \tag{20.19}$$

Amplituda osiąga największą wartość, gdy częstotliwość siły wymuszającej

$$\omega'' = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,. \tag{20.20}$$

Ta częstotliwość nazywa się *częstotliwością rezonansową* ω_r, a zjawisko osiągania maksymalnej amplitudy drgań wymuszonych o takiej częstotliwości nazywa się *rezonansem*. Częstotliwość rezonansowa jest zawsze mniejsza od częstotliwości drgań swobodnych układu. Jedynie gdy współczynnik tłumienia jest mały, można przyjąć, że $\omega_r \approx \omega_0$.



Rys. 20.2. Amplituda ruchu wymuszonego w funkcji częstotliwości siły wymuszającej dla różnych współczynników tłumienia: $\beta_1 = 0{,}1\,\omega_0$, $\beta_2 = 0{,}25\,\omega_0$, $\beta_3 = 0{,}5\,\omega_0$

Przykładowe wykresy amplitudy wymuszonego ruchu harmonicznego w funkcji częstotliwości siły wymuszającej dla różnych wartości współczynnika tłumienia przedstawiono na rys. 20.2. Krzywe widoczne na wykresie często są nazywane *krzywymi rezonansowymi*.

Siła wymuszająca wykonuje pracę, której część jest przekazywana do oscylatora, co powoduje przyrost jego energii, a więc również amplitudy. Wartość amplitudy ustala się, gdy prędkość strat energii zrówna się z mocą przekazywaną do oscylatora przez siłę wymuszającą. Moc absorbowana jest oczywiście największa w rezonansie i zmniejsza się do połowy wartości maksymalnej, gdy częstotliwość zmniejsza się lub wzrasta względem częstotliwości rezonansowej o pewną wartość $\Delta\omega_{1/2}$, określoną następująco:

$$P(\omega_r \pm \Delta\omega_{1/2}) = 1/2P(\omega_r). \tag{20.21}$$

Wielkość $\Delta\omega_{1/2}$ nazywa się *szerokością połówkową*. Można ją łatwo zmierzyć, odczytując na wykresie szerokość krzywej rezonansowej w połowie wysokości. Można wykazać**, że *całkowita szerokość rezonansu* może być wyrażona przez współczynnik tłumienia lub czas relaksacji w następujący sposób:

$$2\Delta\omega_{1/2} = 2\beta = \frac{1}{\tau}. \tag{20.22}$$

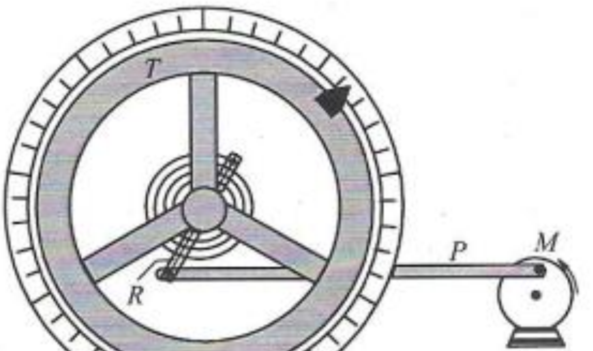
Posługując się powyższymi związkami oraz równaniem (20.16) dobroć oscylatora możemy wyrazić za pomocą szerokości rezonansu:

$$Q = \frac{\omega_0}{2(\Delta\omega_{1/2})}, \tag{20.23}$$

a więc ostrość krzywej rezonansowej jest miarą dobroci oscylatora. Wąska krzywa rezonansowa oznacza dużą dobroć, a więc małe tłumienie i małe straty energii.

Pomiary i obliczenia

Oscylatorem, którego właściwości chcemy określić, jest wahadło balansowe przedstawione na rys. 20.3. Składa się ono z tarczy balansowej T oraz spiralnej sprężyny, której jeden koniec łączy się z tarczą, a drugi z ramieniem R. Tarcza i ramię są umieszczone niezależnie na wspólnej osi obrotu, a koniec ramienia jest połączony prętem P z ramieniem silnika M, którego obrót wytwarza sinusoidalnie zmieniający się moment siły działający na tarczę balansową.



Rys. 20.3. Urządzenie do badania drgań wymuszonych; M – silnik elektryczny, P – pręt łączący silnik z ramieniem R tarczy balansowej T

Gdy ramię jest unieruchomione, wahadło może wykonywać ruch harmoniczny prawie swobodny, tłumiony tylko oporami urządzenia. Jeżeli do tarczy dołączymy elektromagnes, wystąpi dodatkowe tłumienie. W tym ostatnim przypadku hamowanie odbywa się w wyniku oddziaływania pola magnetycznego

** Por. przypis *

z prądami wirowymi wytworzonymi podczas ruchu wahadła. Siła tłu-miąca ruch może być regulowana za pomocą natężenia prądu elektromagnesu.

Gdy silnik się obraca, oscylator wykonuje ruch harmoniczny wymuszony. Częstotliwość obrotów silnika zmieniamy przez zmianę napięcia zasilania, a mierzymy przez pomiar sekundomierzem czasu kilku wahnięć. Zarówno tarcza, jak i ramię mają wskaźniki umożliwiające obserwację ich ruchu i pomiary amplitud.

Celem ćwiczenia jest znalezienie współczynnika dobroci oscylatora na podstawie dwóch niezależnych pomiarów.

- Dla ruchu tłumionego mierzymy najpierw okres i obliczamy częstotliwość ω'. Następnie mierzymy amplitudy kilku kolejnych wahnięć i na tej podstawie obliczamy współczynnik tłumienia i stałą relaksacji (wzory 20.12 i 20.13). Na podstawie tych wielkości obliczamy dobroć, stosując równanie (20.16).
  Uwaga: Jeżeli tłumienie nie jest zbyt silne, możemy przyjąć, że $\omega'=\omega_0$; w przeciwnym wypadku musimy usunąć elektromagnes tłumiący i znaleźć ω_0 dla oscylatora nietłumionego.
- Dla ruchu wymuszonego wykonujemy pomiary krzywej rezonansowej, z której znajdujemy szerokość połówkową i następnie obliczamy dobroć ze wzoru (20.23).

Przebieg ćwiczenia

1. Unieruchomić ramię R i ustawić skalę tak, aby wskaźnik tarczy wskazywał zerową wartość. Odłączyć elektromagnes hamujący.
2. Zmierzyć czas około 10 wahnięć i na tej podstawie obliczyć okres i częstotliwość kołową ω'.
3. Zmierzyć amplitudy dla kilku następujących po sobie wahnięć.
4. Stosując wzór (20.12), wyznaczyć dla różnych par amplitud współczynnik β, a następnie jego wartość średnią.
5. Obliczyć czas relaksacji oraz częstotliwość drgań swobodnych.
6. Obliczyć dobroć oscylatora na podstawie wzoru (20.16).
7. Uruchomić drgania wymuszone. Ustalić szacunkowo zakres napięć zasilania silnika, w którym obserwuje się wyraźne zmiany amplitudy drgań. Rezonans powinien wystąpić mniej więcej w środku tego zakresu.
8. W wyznaczonym zakresie dokonać co najmniej 10 pomiarów okresu i amplitudy drgań.
9. Wykreślić krzywą rezonansową, tzn. zależność amplitudy od częstotliwości kołowej.
10. Z wykresu znaleźć częstotliwość rezonansową oraz całkowitą szerokość rezonansu $2(\Delta\omega_{1/2})$.
11. Obliczyć dobroć oscylatora na podstawie równania (20.23).
12. Powtórzyć punkty 2–11 dla różnych wartości prądu elektromagnesu.