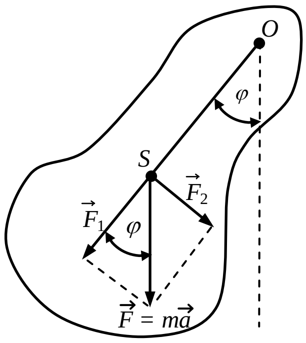
Wahadło fizyczne

Cel ćwiczenia

Wyznaczenie momentu bezwładności brył sztywnych na podstawie pomiarów okresu drgań wahadła fizycznego oraz z teoretycznego wzoru na podstawie pomiaru masy brył i ich wymiarów geometrycznych.

Wprowadzenie

Wahadło fizyczne jest to dowolna bryła sztywna, zawieszona powyżej środka ciężkości S bryły, na poziomej osi obrotu O (rys. 4.1). Jeżeli taką bryłę odchylimy od położenia równowagi o niewielki kąt φ, a następnie puścimy, to będzie się ona poruszać ruchem wahadłowym o pewnym okresie T. Ruch wahadła odbywa się pod działaniem siły ciężkości o wartości F. Punktem przyłożenia tej siły jest środek masy wahadła. Siłę ciężkości można rozłożyć na dwie składowe: $\vec{F}_1$ – skierowaną równolegle do prostej OS i $\vec{F}_2$ – prostopadłą do niej. Składowa równoległa nie wpływa na ruch wahadła (mogłaby ona jedynie rozciągać odcinek OS, ale wahadło jest sztywne – rozciąganie nie następuje). Ruch wahadła odbywa się pod wpływem niezrównoważonego momentu siły $\vec{M}$ wywołanego składową siły ciężkości $\vec{F}_2$ i można go uważać za szczególny przypadek ruchu obrotowego zmiennego o zmiennym przyspieszeniu $\vec{\varepsilon}$:



Rys. 4.1. Wahadło fizyczne wychylone z położenia równowagi

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I},$$

gdzie I jest momentem bezwładności.

Dla danego kąta wychylenia φ wartość momentu siły M względem osi przechodzącej przez punkt O wyraża wzór:

$$M = F_2 l = Fl\sin\varphi = mgl\sin\varphi, \tag{4.2}$$

gdzie m jest masą bryły, a l – odległością środka masy S od osi obrotu O. Po podstawieniu równania (4.2) do wzoru (4.1), a następnie przekształceniu wzoru (4.1) oraz oznaczeniu przyspieszenia kątowego przez $d^2\varphi/dt^2$ otrzymujemy wzór wyrażający *drugą zasadę dynamiki Newtona* dla ruchu obrotowego:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi. \tag{4.3}$$

Znak minus w powyższym równaniu oznacza, że siła $\vec{F}_2$ jest zawsze skierowana przeciwnie do kierunku wychylenia. Dla małych kątów wychylenia wahadła z położenia równowagi ($\sin\varphi \cong \varphi$; $\varphi < 5°$) równanie (4.3) można zapisać następująco:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\varphi, \tag{4.4}$$

co po przekształceniu można wyrazić w postaci:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgl\varphi = 0. \tag{4.5}$$

Zależność (4.5) jest równaniem *drgań harmonicznych*. Z ruchem harmonicznym mamy do czynienia tylko wtedy, gdy działająca siła jest proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi i skierowana w stronę położenia równowagi. Szczególne rozwiązanie równania (4.5) ma postać:

$$\varphi = A\sin\omega t, \tag{4.6}$$

gdzie A oznacza amplitudę, ω – częstotliwość kołową. Po podstawieniu równania (4.6) do wzoru (4.5) i wykonaniu różniczkowania otrzymamy:

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I}. \tag{4.7}$$

Korzystając z powyższego wzoru oraz zależności:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{4.8}$$

można wyznaczyć okres drgań wahadła fizycznego:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}. \tag{4.9}$$

Wyrażenie mgl nazywamy *momentem kierującym wahadła*.

Jak widać, okres drgań wahadła fizycznego zależy od momentu bezwładności I, masy m bryły oraz odległości l środka masy od osi obrotu. Znając wartość okresu, masę oraz odległość l, można wyznaczyć moment bezwładności danej bryły.

Przy wyprowadzeniu wzoru (4.9) zostało przyjęte założenie, że $\varphi < 5°$. W przypadku wychylenia o większy kąt ruch wahadła pozostaje okresowy, ale nie jest harmoniczny, a rozwiązanie równania (4.3) daje bardziej złożoną zależność. Okres takiego wahadła jest uzależniony od kąta φ w następujący sposób:

$$T_{\varphi}=T_0\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\varphi}{2}+\ldots+\left(\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\right)^2\sin^{2n}\frac{\varphi}{2}\right]. \quad (4.10)$$

Po rozwinięciu funkcji sinus w szereg potęgowy otrzymamy wzór:

$$T_{\varphi}=T_0\left[1+\frac{1}{16}\varphi^2+\frac{11}{3072}\varphi^4+\ldots\right], \quad (4.11)$$

gdzie kąt φ wyrażany jest w radianach.

Momentem bezwładności I ciała sztywnego nazywamy sumę iloczynów mas m_i wszystkich elementów ciała i kwadratów ich odległości r_i od osi obrotu. Dla ciał o ciągłym rozkładzie masy sumowanie przechodzi w całkowanie:

$$I=\int r^2 dm, \quad (4.12)$$

gdzie dm to masa nieskończenie małego elementu bryły, a r – odległość takiego elementu od osi obrotu.

Moment bezwładności I w ruchu obrotowym odgrywa rolę analogiczną do roli masy w ruchu postępowym, stanowi miarę bezwładności obracającego się ciała. Zależy on od masy ciała oraz jej przestrzennego rozmieszczenia względem osi obrotu. To samo ciało sztywne może mieć różne momenty bezwładności w odniesieniu do różnych osi.

Znając gęstość materiału, z którego wykonana jest bryła ρ, można obliczyć element masy dm ze wzoru:

$$dm=\rho\, dV, \quad (4.13)$$

wtedy moment bezwładności dla brył jednorodnych o regularnych kształtach można łatwo obliczyć ze wzoru:

$$I=\rho\int_V r^2 dV, \quad (4.14)$$

gdzie r jest odległością elementu od osi obrotu, ρ – gęstością, a V – objętością bryły. Gotowe wzory na wyznaczenie momentów bezwładności takich brył względem różnych osi można znaleźć w tabeli 4.1.

Moment bezwładności występujący we wzorze (4.9) jest momentem względem osi obrotu przechodzącej przez punkt zawieszenia O. Można go obliczyć, gdy znany jest moment bezwładności I_0 względem osi równoległej przechodzącej przez środek ciężkości bryły, z twierdzenia Steinera:

$$I=I_0+ml^2, \quad (4.15)$$

gdzie l jest odległością od środka ciężkości do punktu zawieszenia bryły.

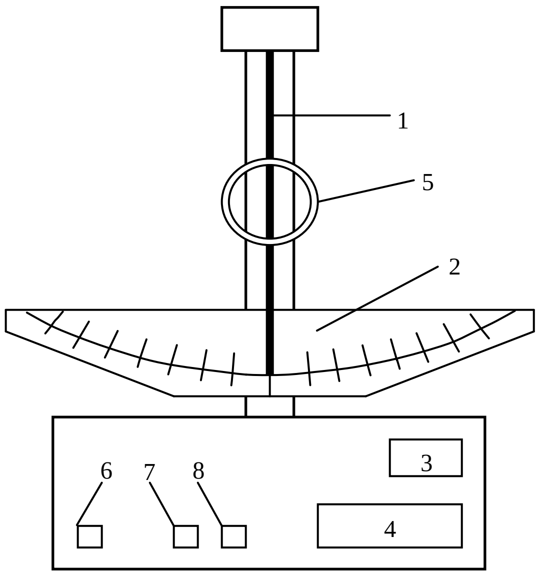
Gdy bryła sztywna składa się z n zespolonych ze sobą elementów, wtedy okres drgań tak utworzonego wahadła fizycznego można wyliczyć ze wzoru:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} I_i}{\sum_{i=1}^{n} g m_i l_i}}, \qquad (4.16)$$

gdzie I_i oznacza moment bezwładności i-tej bryły względem osi obrotu przechodzącej przez punkt zawieszenia, m_i – masę i-tej bryły, a l_i – odległość środka ciężkości i-tej bryły od punktu zawieszenia. Dla układu złożonego z dwóch brył, gdy znany jest okres wahań układu i moment bezwładności jednej z brył, można obliczyć z tego wzoru moment bezwładności drugiej bryły.

Stanowisko pomiarowe

Przyrząd pomiarowy przedstawiono na rysunku 4.2. Składa się on z wahadła fizycznego (1), skali kątowej (2) pozwalającej określić amplitudę drgań, licznika okresów (3) oraz elektronicznego milisekundomierza (4). Wahadło fizyczne ma kształt pręta, którego jeden koniec przymocowany jest do osi osadzonej w dwóch łożyskach kulkowych. Na pręcie tym można mocować w dowolnym miejscu ciężarki stanowiące część zestawu ćwiczeniowego (5). Koniec wahadła fizycznego,



Rys. 4.2. Schemat przyrządu pomiarowego (opis w tekście)

poruszając się, przecina strumień świetlny żarówki padający na fototranzystor. W wyniku tego generowane są impulsy elektryczne doprowadzane do licznika cyfrowego, który zlicza liczbę okresów, licząc co drugi impuls. Naciśnięcie przycisku SIEĆ (6) uruchamia przyrząd. Przycisk ZER (7) powoduje zerowanie licznika oraz generowanie sygnału zezwolenia na pomiar, pierwsze przejście wahadła przez strumień świetlny uruchamia milisekundomierz, który wyłącza się przyciskiem STOP (8). Pomiar czasu kończy się przez naciśnięcie klawisza STOP, ale dopiero po zakończeniu pełnego okresu.

Tabela 4.1. Momenty bezwładności podstawowych brył symetrycznych

Rodzaj ciała	Oś obrotu	Moment bezwładności
Kula pełna, promień R	przez środek	$\frac{2}{5}MR^2$
Powłoka sferyczna, promień R	przez środek	$\frac{2}{3}MR^2$
Walec, promień R	przez środek symetrii	$\frac{1}{2}MR^2$
Walec, promień R, wysokość h	średnica przechodząca przez środek bryły	$M(\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{12}h^2)$
Pręt, długość l	prostopadła do pręta, przechodząca przez jego środek	$\frac{1}{12}Ml^2$
Pręt, długość l	prostopadła do pręta, przechodząca przez jego koniec	$\frac{1}{3}Ml^2$
Pierścień, o promieniach wew. R_1 i zew. R_2	oś symetrii	$\frac{1}{2}M(R_1^2+R_2^2)$

Przebieg ćwiczenia

1. Uruchomić przyrząd. Odchylić wahadło fizyczne (sam pręt) o kąt nieprzekraczający 3°, puścić i zmierzyć czas 5 okresów. W celu zwiększenia dokładności pomiar powtórzyć kilkakrotnie. Z otrzymanych w ten sposób wyników wyznaczyć wartość średnią okresu T_0.
2. Znając masę m i długość pręta, obliczyć jego teoretyczny moment bezwładności (patrz tab. 4.1), a następnie moment bezwładności pręta z przekształconego wzoru (4.9), wykorzystując wyznaczony w punkcie 1 okres T_0. Porównać oba

otrzymane wyniki. *Uwaga*: Nie mylić długości pręta z odległością l od środka ciężkości bryły do punktu zawieszenia.

3. Wychylić pręt kolejno o 5°, 10°, 15°, 20°, 25° i 30° i wyznaczyć okresy T_5, T_{10} itd. jak w punkcie 1. Następnie dla każdej wartości obliczyć względne wydłużenie okresu:

$$\frac{T_\varphi - T_0}{T_0}. \tag{4.17}$$

4. Wyliczyć teoretyczne wartości okresów T_φ dla badanych amplitud z zależności (4.11). Korzystając z otrzymanych wyników, obliczyć z równania (4.17) teoretyczne względne wydłużenie okresu.
5. Wykonać wykres zależności teoretycznego względnego wydłużenia okresu od amplitudy φ. Następnie na ten sam wykres nanieść wartości względnego wydłużenia okresu wyliczone w punkcie 3.
6. Wyznaczyć masę i wymiary geometryczne dodatkowej bryły. Na ich podstawie wyliczyć teoretyczny moment bezwładności bryły.
7. Dodatkową bryłę umieścić na pręcie w znanej odległości l od osi obrotu i wyznaczyć jak w punkcie 1 okres nowo powstałego wahadła. Pomiar powtórzyć dla trzech odległości l.
8. Znając moment bezwładności pręta oraz okres wahań układu (pręt + dodatkowa bryła), wyliczyć, korzystając z przekształconego równania (4.16), moment bezwładności dodatkowej bryły względem badanej osi obrotu. Korzystając z tw. Steinera oraz wyznaczonych wartości l i m obliczyć moment bezwładności bryły względem jej osi symetrii. Obliczyć wartość średnią z uzyskanych wyników
9. Porównać wartość momentu bezwładności dodatkowej bryły obliczoną teoretycznie z wartością uzyskaną z pomiarów.

Zestaw ćwiczeniowy

Wahadło fizyczne w kształcie pręta, elektroniczny miernik czasu i okresów oraz dodatkowa bryła

Pojęcia kluczowe

- Wahadło fizyczne
- Ruch harmoniczny prosty, drgania anharmoniczne
- Moment siły, moment bezwładności
- Dynamika ciała sztywnego